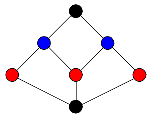
Begriffsanalytische und modelltheoretische Messtheorie



Prof. Dr. Karl Erich Wolff

Ernst-Schröder-Zentrum für Begriffliche Wissensverarbeitung
an der Technischen Universität Darmstadt
Workshop des Darmstädter Ontologiekreises am 16. Mai 2014

Messen:
eine Größe mit Hilfe eines Maßes bestimmen

Mit Zahlen messen:

Zeitdauern in sec, min, h, ...

Länge in cm, m, km, ...

Masse in g, kg, t, …

Fläche in Quadratmetern, …

Volumen in Kubikmetern, …

Temperatur in Grad Celsius, ...

Geschwindigkeit in m/sec, ...

Allgemeiner messen:

Lautstärke in Dezibel, …

Härte (Brinell) in Newton/mm^2

Windstärken in Beaufort (0-12)

Intelligenzquotient (N(100,15))

Wirkungsbereiche messen:

1-, 2-, 3-dimensional

Bedeutung berücksichtigen:

Wege vergleichen:Umgebung

Granularität berücksichtigen

Anfänge der Messtheorie

Hermann von Helmholtz
1821 - 1894

Studium der Physik und Medizin
Promotion in Medizin
Professur für Physiologie in Berlin, Königsberg, Bonn,
für Physik in Berlin.
Erster Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin
Physiologie des Hörens und Sehens
Dreifarbentheorie
1887: Zählen und Messen - erkenntnistheoretisch betrachtet

Literatur zur Messtheorie

O. Hölder (1901):
Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß
S.S. Stevens (1946):
On the theory of scales of measurement.
D. Scott, P. Suppes (1958): Foundational aspects of theories of measurement.
D. Krantz, D. Luce, P. Suppes, A. Tversky (1971-1990):
Foundations of Measurement I-III.

Transformationen einer Messung

Beispiel: Temperatur

$T_{Celsius} = T_{Kelvin} - 273{,}15$

$T_{Réaumur} = (T_{Kelvin} - 273{,}15) \cdot 0{,}8$

Sei A eine Menge, f eine „Messung“: f: A → IR,

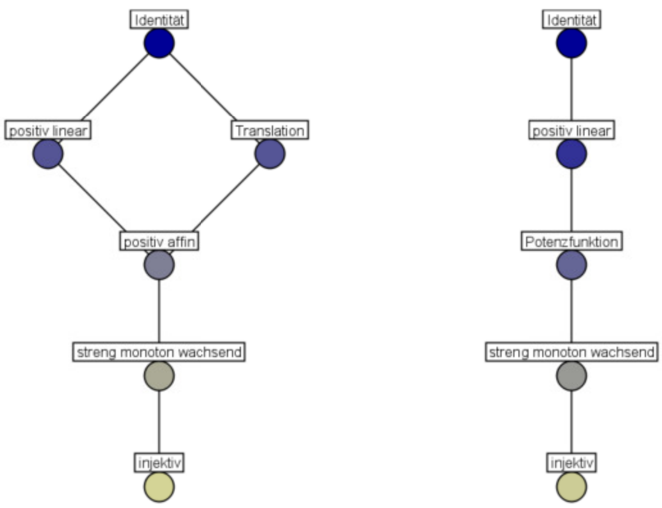
eine reelle Funktion φ: IR → IR heißt

- positiv affin, falls $\varphi(x) = a \cdot x + b$, $a > 0$
- positiv linear, falls $\varphi(x) = a \cdot x$, $a > 0$
- die Identität, falls $\varphi(x) = x$

$\varphi = id \Rightarrow \varphi$ positiv linear $\Rightarrow \varphi$ positiv affin $\Rightarrow$

φ streng monoton $\Rightarrow \varphi$ injektiv

Die klassischen Transformationen auf IR und auf IR+



Beispiel einer Ordinalskala: Nummernausgabe in einer Warteschlange

Ausgabe-Regel (R):

Wenn x vor y in die Warteschlange kam, dann ist $n(x) < n(y)$.

n ist eine Funktion, die jeder Person in der Warteschlange eine natürliche Zahl zuordnet.

Es gilt auch die Umkehrung (UR):

Wenn $n(x) < n(y)$ ist, dann kam x vor y in die Warteschlange.

Kurz:

x vor y	$\Leftrightarrow$	$n(x) < n(y)$
„empirisch“		„numerisch“

Beispiel einer Ordinalskala: Nummernausgabe in einer Warteschlange

Ausgabe-Regel (R):

Wenn x vor y in die Warteschlange kam, dann ist $n(x) < n(y)$.

n ist eine Funktion, die jeder Person in der Warteschlange eine natürliche Zahl zuordnet.

Es gilt auch die Umkehrung (UR):

Wenn $n(x) < n(y)$ ist, dann kam x vor y in die Warteschlange.

Kurz:

x vor y	$\Leftrightarrow$	$n(x) < n(y)$	$\Leftrightarrow$	$\varphi(n(x)) < \varphi(n(y))$
„empirisch“		„numerisch“		falls φ streng monoton

Ansätze zu formalen Definitionen von Messungen

Stevens (1951): „Measurement is the assignment of numerals to objects or events according to rules."

Torgerson (1959): „Measurement of a property involves the assignment of numbers to systems to represent this property."

Algebraische Messtheorie:

Krantz, Luce, Suppes, Tversky: Foundations of Measurement (1971-1990)

Hauptidee: Eine Messung wird definiert als eine strukturerhaltende Abbildung von einem „empirischen" in ein „numerisches" Relativ (= Relationalstruktur)

Messungen von einem „empirischen" in ein „numerisches" Relativ

Relationalstruktur: $\mathbf{A} = (A, R_1, \ldots, R_n)$, R_i s_i-stell. Rel. auf A

$s := (s_1, \ldots, s_n)$ heißt der Typ von $\mathbf{A}$,

$\mathbf{B} = (B, S_1, \ldots, S_n)$ sei vom selben Typ s wie $\mathbf{A}$.

Eine Funktion $f: A \to B$ heißt eine Messung von $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, falls für alle i=1,...,n und für alle $(a_1, \ldots, a_{s(i)}) \in A^{s(i)}$ $(s(i):=s_i)$

$$(a_1, \ldots, a_{s(i)}) \in R_i \iff (f(a_1), \ldots, f(a_{s(i)})) \in S_i$$

Beispiel: x vor y $\iff$ $n(x) < n(y)$

Zulässige Transformationen einer Messung

Sei f: A → B eine Messung von **A** in **B**.

φ: f(A) → B heißt eine zulässige Transformation von f, falls auch die Verkettung φf eine Messung von **A** in **B** ist.

T(f) bezeichne die Menge aller zulässigen Transformationen von f.

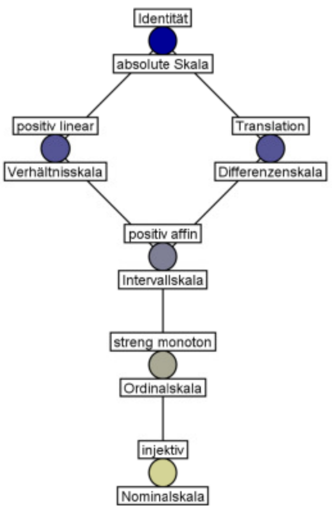
Beispiel:

$T_{\text{Réaumur}} = (T_{\text{Kelvin}} - 273{,}15)\cdot 0{,}8$

$\varphi(x) := (x - 273{,}15)\cdot 0{,}8$ ist eine zulässige Transformation der Kelvin-Messung (in die reellen Zahlen).

Die klassischen Skalentypen auf IR und auf IR+

(nach Luce et al.: Foundations of Measurement, Vol. 3, p.113)

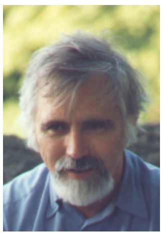


Modelltheorie ...

Alfred Tarski
1901 - 1983

- … ist ein Bereich der mathematischen Logik
- … entstand aus Fragen zur Beschreibung mathematischer Strukturen durch Axiome
- … verwendet die Prädikatenlogik
- … untersucht die Relation, dass eine Struktur ein Modell von prädikatenlogischen Bedingungen ist

Formale Begriffsanalyse



Rudolf Wille
TU Darmstadt

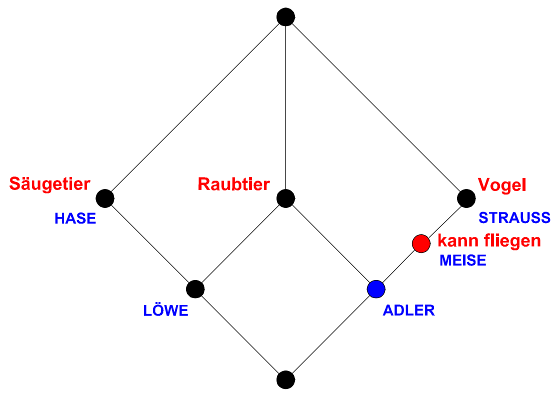
- 1982: Einführung durch Prof. Dr. Rudolf Wille
- Mathematisierung des Begriffs „Begriff"
- Visualisierung begrifflicher Hierarchien

- Datenanalyse
- Begriffliche Skalierungstheorie
- Begriffliche Wissensakquisition

- Kontextuelle Logik
- Begriffliche Interpretation der Fuzzy-Theorie
- Temporale Begriffsanalyse

Formale Kontexte und Begriffsverbände

TIERE	Raubtier	kann fliegen	Vogel	Säugetier
LÖWE	×			×
MEISE		×	×	
ADLER	×	×	×	
HASE				×
STRAUSS			×	



Formale Begriffe eines formalen Kontextes

Def.:
Sei (G, M, I) ein formaler Kontext, i.e. $I \subseteq G \times M$.

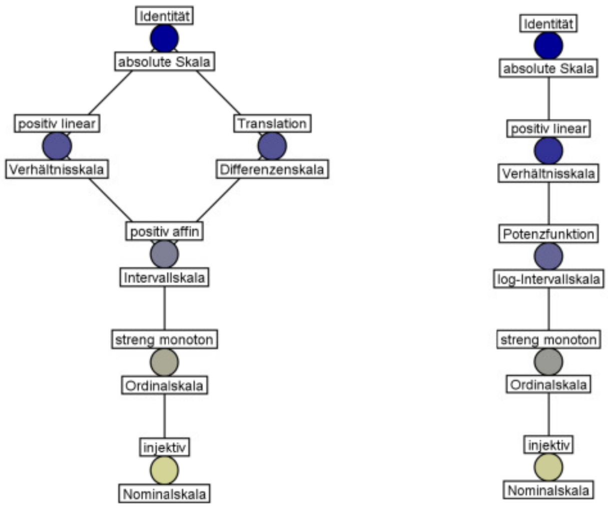
Ein Paar (A,B) heißt ein formaler Begriff von (G, M, I),
falls

$$A \subseteq G,\ B \subseteq M,\ A^{\uparrow} = B,\ B^{\downarrow} = A,$$

wobei $A^{\uparrow} := \{m \mid g\, I\, m \text{ für alle } g \in A\}$
und $B^{\downarrow} := \{g \mid g\, I\, m \text{ für alle } m \in B\}$.

A heißt der Umfang von (A,B),
B heißt der Inhalt von (A,B).

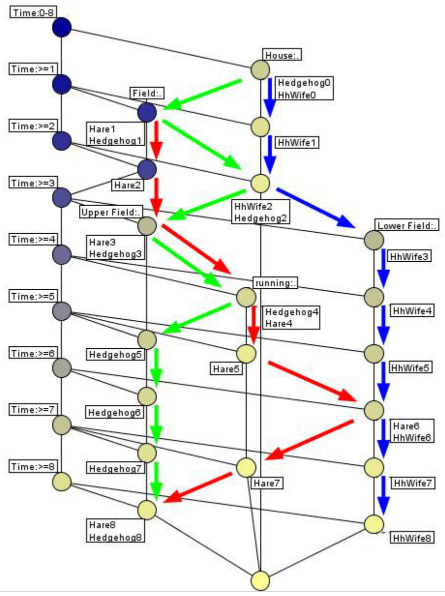
Die klassischen Skalentypen als formale Begriffe



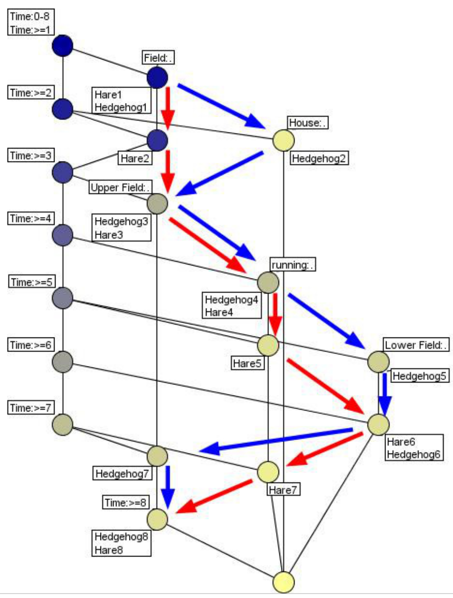
Kritische Bemerkungen zur Messtheorie

1. Die Konstruktion eines empirischen Relativs aus den Handlungen eines praktisch Messenden erfordert die Abstraktion von der beschränkten Genauigkeit der messenden Handlung.
2. Die Bedingungen, die das empirische Relativ erfüllen soll, sind in der Praxis nicht überprüfbar. (Beispiel: „Die Existenz beliebig kleiner Objekte“ im dritten Hölderaxiom für extensive Größen (wie Masse, Länge, Dauer):
   Für alle x, y mit $x > y$ gibt es ein z mit $x > y \bullet z$.

Hare and Hedgehog: Situation Space



The Hare‘s View: Situation Space




Danke für Ihre Aufmerksamkeit!
www.fbmn.fh-darmstadt.de/home/wolff